

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Московский Центр фундаментальной и прикладной
математики

представляют
курс лекций

«РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ»

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Тема: РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры общей математики

Крицков Леонид Владимирович

Для студентов второго курса факультета ВМК МГУ

ПЛАН ЛЕКЦИЙ

Москва, март–апрель 2020 г.

Лекция 1

Введение

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье

1.1. Бесконечномерные пространства со скалярным произведением

1.2. Ортонормированные системы. Свойство коэффициентов Фурье

Лекция 2

§ 2. Замкнутые и полные ортонормированные системы

2.1. Замкнутые системы

2.2. Полнота системы

§ 3. Сходимость средних Чезаро тригонометрического ряда Фурье (ТРФ)

3.1. Интегральное представление для частичных сумм ТРФ

Лекция 3

3.2. Интегральное представление для средних Чезаро ТРФ

3.3. Теорема о равномерной сходимости средних Чезаро ТРФ

3.4. Локальная теорема Фейера

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса

Лекция 4

Обсуждение следствий замкнутости тригонометрической системы

§ 5. Простейшие условия равномерной сходимости ТРФ

Почленное дифференцирование ТРФ

Оценка скорости сходимости ТРФ

§ 6. Уточнение условий сходимости ТРФ. Принцип локализации

6.1. Свойства коэффициентов Фурье

6.2. Выделение главной части частичных сумм ТРФ

Лекция 5

§ 7. Уточнение условий сходимости ТРФ. Классы Гёльдера

7.1. Функциональные классы Гёльдера

7.2. Равномерная сходимость ТРФ для функций из классов Гёльдера

7.3. Сходимость ТРФ в точке

7.4. Примеры и заключительные замечания

Лекция 6

§ 8. Интеграл Фурье

8.1. Образ Фурье и его свойства

8.2. Формула обращения

8.3. Преобразование Фурье гладких функций

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Тема: РЯДЫ ФУРЬЕ (лекция 1)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент **Крицков Леонид Владимирович**

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

18 марта 2020 г.

Идея применения рядов по специально построенным системам функций для решения прикладных задач была предложена в трудах французского математика и физика **Жан-Батиста Жозефа Фурье**.

В своем докладе в Парижской Академии наук (1807), а затем в своем мемуаре «Аналитическая теория теплоты» (1822) он изложил подход к изучению процессов распространения тепла, суть которого может быть продемонстрирована на следующем простом **модельном примере**.

Рассмотрим **задачу распространения тепла** в тонком стержне конечной длины, на концах которого поддерживается постоянная температура. С математической точки зрения эта задача сводится к нахождению функции $u(x, t)$ координаты точки на стержне x и времени t , которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (0.1)$$

Здесь $t > 0$, а x меняется на конечном интервале – например, $0 < x < 1$. Постоянство температуры на концах сводится к условиям

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0. \quad (0.2)$$

Кроме того, задается начальное (при $t = 0$) распределение температуры стержня

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1. \quad (0.3)$$

Таким образом, искомая функция $u = u(x, t)$ является решением следующей **начально-краевой задачи**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (0.4)$$

Идея Фурье состояла в том, чтобы **«собрать» решение** $u(x, t)$ задачи (0.4) из **простейших решений**, удовлетворяющих только (0.1) и (0.2):

$$u_n(x, t) = e^{-\mu_n^2 t} \sin \mu_n x, \quad (0.5)$$

где $\mu_n = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$

«Собрать» – значит использовать линейную комбинацию решений (0.5):

$$u(x, t) \sim \sum_n c_n u_n(x, t). \quad (0.6)$$

Осталось при такой «сборке» только учесть условие (0.3).

Если, например, $\varphi(x) = \sin 2\pi x - \sin \pi x$, то ответ очевиден

$$u(x, t) = -u_1(x, t) + u_2(x, t).$$

Если же $\varphi(x)$ – какая-то функция общего вида, то «сборка» (0.6) с конечной линейной комбинацией невозможна и надо использовать полный ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t), \quad (0.7)$$

а коэффициенты c_n выбирать так, чтобы

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \mu_n x. \quad (0.8)$$

Так, задача сводится к разложению заданной функции $\varphi(x)$ в ряд по специальной системе функций.

Подобная задача имеет знакомый аналог в теории конечномерных евклидовых пространств.

Оказалось, что система $\{\sin \mu_n x\}_{n \geq 1}$ ортогональна в смысле скалярного произведения

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

А для ортогональных базисов $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ в N -мерном евклидовом пространстве справедливо явное разложение

$$f = \sum_{n=1}^N \frac{(f, \psi_n)}{(\psi_n, \psi_n)} \psi_n. \quad (0.9)$$

В бесконечномерном случае приходится отвечать на дополнительные, более сложные вопросы. Например,

- достаточно ли функций в системе $\{\sin \mu_n x\}_{n \geq 1}$ для построения аналога разложения (0.9) в виде (0.8),
- есть ли в системе «лишние» функции, после исключения которых разложение (0.8) возможно,
- в каком смысле следует понимать сходимость ряда (0.8).

Решению этих и некоторых других вопросов, связанных с разложениями в функциональные ряды, и будут посвящены разделы этой главы.

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

1.1. Бесконечномерные пространства со скалярным произведением.

Пусть L – вещественное линейное пространство и $\dim L = \infty$.

Опр. 1. L называется **евклидовым пространством**, если на нем введено отображение (скалярное произведение)

$$\forall f, g \in L \mapsto (f, g) \in \mathbb{R},$$

обладающее следующими свойствами:

- ▶ $(f, g) = (g, f) \quad \forall f, g \in L$ (симметричность);
- ▶ $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, h) + \beta(g, h) \quad \forall f, g, h \in L \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (линейность по первому аргументу);
- ▶ $(f, f) \geq 0 \quad \forall f \in L$ и $(f, f) = 0 \iff f = \theta$ (положительная определенность).

Как известно, в евклидовом пространстве:

- скалярное произведение линейно и по второму аргументу,
- выполнено **неравенство Коши–Буняковского**:

$$(f, g)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g) \quad \forall f, g \in L, \quad (1)$$

причем равенство возможно только тогда, когда либо $f = \alpha g$, либо $g = \alpha f$ с некоторым $\alpha \in \mathbb{R}$.

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

Нам понадобится также более широкий класс пространств со скалярным произведением.

Опр. 2. L называется **псевдоевклидовым пространством**, если на нем введено отображение (скалярное произведение)

$$\forall f, g \in L \mapsto (f, g) \in \mathbb{R},$$

которое удовлетворяет первому и второму свойствам из Опр.1, а вместо третьего свойства выполнено следующее:

- ▶ $(f, f) \geq 0 \quad \forall f \in L$ (неотрицательная определенность).

Отметим, что в псевдоевклидовом пространстве остается справедливым само неравенство Коши–Буняковского:

$$(f, g)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g) \quad \forall f, g \in L. \quad (1)$$

Будем далее использовать для евклидова пространства обозначение E , а для псевдоевклидова пространства – обозначение $\tilde{E}$.

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

Примеры

1. $C[a, b]$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (2)$$

$C[a, b]$ – бесконечномерное евклидово пространство (проверьте!).

2. $E_0[a, b]$ – пространство кусочно-непрерывных на $[a, b]$ функций со скалярным произведением (2). Оно состоит из функций $f(x)$, которые непрерывны на $[a, b]$ кроме, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода $x_i \in (a, b)$, $i = \overline{1, m}$, причем в каждой точке разрыва

$$f(x_i) = \frac{1}{2} (f(x_i - 0) + f(x_i + 0)).$$

$E_0[a, b]$ – бесконечномерное евклидово пространство (проверьте!).

3. $\mathcal{R}[a, b]$ – пространство всех функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$, со скалярным произведением (2).

$\mathcal{R}[a, b]$ – бесконечномерное псевдоевклидово пространство (проверьте!).

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

Определим также вещественные линейные пространства с нормой.

Опр. 3. L называется **нормированным пространством**, если на нем введено отображение (норма)

$$\forall f \in L \mapsto \|f\| \in \mathbb{R},$$

обладающее следующими свойствами:

- ▶ $\|f\| \geq 0 \quad \forall f \in L$ и $\|f\| = 0 \iff f = \theta$ (положительная определенность);
- ▶ $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\| \quad \forall f \in L \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (положительная однородность);
- ▶ $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \forall f \in L$ (неравенство треугольника).

Опр. 4. L называется **почти нормированным пространством**, если на нем введено отображение (полунорма)

$$\forall f \in L \mapsto \|f\| \in \mathbb{R},$$

которое обладает вторым и третьим свойствами Опр.3 и вместо первого свойства выполнено следующее:

- ▶ $\|f\| \geq 0 \quad \forall f \in L$ (неотрицательная определенность).

Замечание. Любое евклидово пространство E можно превратить в нормированное, положив $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Это же правило превращает любое псевдоевклидово пространство $\tilde{E}$ в почти нормированное.

В обоих случаях неравенство Коши–Буняковского может быть записано в виде

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad f, g \in E(\tilde{E}) \quad (3)$$

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

1.2. Ортонормированные системы.

Опр. 5. Элементы $f, g \in E(\tilde{E})$ называются **ортгональными**, если $(f, g) = 0$.

Опр. 6. Система $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots \in E(\tilde{E})$ называется **ортонормированной** (ОНС), если

$$(\psi_k, \psi_j) = 0 \quad \forall k \neq j, \quad \|\psi_k\| = 1 \quad \forall k.$$

Важный пример (Л.Эйлер, 1793). В $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$ **тригонометрическая система функций** (ТрСФ):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (4)$$

образует бесконечную ОНС (проверьте!).

Замечание. Есть и другие примеры ОНС.

Например, в $\mathcal{R}[-1, 1]$ ОНС образуют так называемые полиномы Лежандра. В $\mathcal{R}[0, 1]$ ОНС являются системы Радемахера и Хаара, состоящие из кусочно-постоянных разрывных функций.

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

Рассмотрим произвольную ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $E(\tilde{E})$.

Опр. 7. **Рядом Фурье** для $f \in E(\tilde{E})$ по системе $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется формальный ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k) \psi_k, \quad (5)$$

где коэффициенты $(f, \psi_k) \equiv f_k$ называются **коэффициентами Фурье** для f .

Отметим, что в конечномерном пространстве E с ортонормированным базисом $\{\psi_k\}_{k=1}^n$ коэффициенты Фурье являются координатами рассматриваемого вектора $f \in E$:

$$f = \sum_{k=1}^n (f, \psi_k) \psi_k, \quad f \in E.$$

Разъясним выбор коэффициентов ряда Фурье (5) в бесконечномерных пространствах.

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

Свойство коэффициентов Фурье.

Для произвольных чисел $c_k \in \mathbb{R}$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ преобразуем следующую величину:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n c_k \psi_k - f \right\|^2 &= \left(\sum_{k=1}^n c_k \psi_k - f, \sum_{l=1}^n c_l \psi_l - f \right) = \\ &= \sum_{k,l=1}^n c_k c_l (\psi_k, \psi_l) - 2 \sum_{k=1}^n c_k (f, \psi_k) + (f, f) = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n c_k f_k + \sum_{k=1}^n f_k^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^n (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 + \|f\|^2 \\ \Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=1}^n c_k \psi_k - f \right\|^2 &= \sum_{k=1}^n (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 + \|f\|^2 \end{aligned} \quad (6)$$

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

Полученное равенство (6) доказывает следующее принципиальное утверждение.

Теорема 1.

Среди всевозможных линейных комбинаций элементов $\psi_1, \dots, \psi_n$ ОН системы n -я частичная сумма ряда Фурье (5) дает наименьшее отклонение по норме от f , причем выполнено равенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2. \quad (7)$$

===== Продолжение следует =====

Литература:

1. В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Математический анализ, т.2. – Глава 8, §1.
2. В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Основы математического анализа, т.2. – Глава 10, §1.
3. В.А.Ильин, Г.Д.Ким. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – Глава XIII, §68-70. Глава XIX, §107-108.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Тема: РЯДЫ ФУРЬЕ (лекция 2)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент **Крицков Леонид Владимирович**

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

25 марта 2020 г.

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье (продолжение)

1.2. Ортонормированные системы. Свойство коэффициентов Фурье

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

Рассматривается произвольная ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $E(\tilde{E})$ и ряд Фурье элемента $f \in E(\tilde{E})$ по этой системе

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k, \quad f_k = (f, \psi_k). \quad (5)$$

Для произвольных чисел $c_k \in \mathbb{R}$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ получено тождество:

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \psi_k - f \right\|^2 = \sum_{k=1}^n (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 + \|f\|^2 \quad (6)$$

и сформулирована теорема.

Теорема 1.

Среди всевозможных линейных комбинаций элементов $\psi_1, \dots, \psi_n$ ОНС n -я частичная сумма ряда Фурье (5) дает наименьшее отклонение по норме от f , причем выполнено равенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2. \quad (7)$$

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \psi_k - f \right\|^2 = \sum_{k=1}^n (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 + \|f\|^2 \quad (6)$$

1. При всех $c_k \in \mathbb{R}$:

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \psi_k - f \right\|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 \quad (6.1)$$

2. При $c_k = f_k$, $k = \overline{1, n}$, неравенство (6.1) перейдет в равенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2. \quad (7)$$

3. При любых $c_k \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \psi_k - f \right\|^2 \geq \left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\|^2. \quad (6.2)$$

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

Равенство (7) теоремы часто называют **аналогом теоремы Пифагора**.

Действительно, в силу того, что $\psi_1, \dots, \psi_n$ – ОНБ своей линейной оболочки, получим

$$\sum_{k=1}^n f_k^2 = \left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k \right\|^2$$

и равенство (7) переходит в соотношение

$$\|f\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k \right\|^2 + \left\| f - \sum_{k=1}^n f_k \psi_k \right\|^2$$

т.е. $\|f\|^2$ есть сумма квадратов норм ортогональной проекции f и перпендикуляра из f на подпространство $\mathcal{L}(\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Последнее равенство можно также переписать в следующем виде

$$\|f\|^2 = \|f_1 \psi_1\|^2 + \dots + \|f_n \psi_n\|^2 + \left\| f - \sum_{k=1}^n f_k \psi_k \right\|^2,$$

что является аналогом общей теоремы Пифагора в $(n+1)$ -мерном пространстве.

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

Равенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 \quad (7)$$

принято называть **тождеством Бесселя**.

Отметим важное следствие тождества Бесселя.

Теорема 2.

Для любой ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \in E(\tilde{E})$ и любого $f \in E(\tilde{E})$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \|f\|^2 \quad (8)$$

(так называемое **неравенство Бесселя**).

Доказательство. Из (7) следует, что

$$\sum_{k=1}^n f_k^2 \leq \|f\|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Значит, частичные суммы ряда ограничены $\Rightarrow$ он сходится и его сумма $\leq \|f\|^2$. ■

Теорема 2.

Для любой ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \in E(\tilde{E})$ и любого $f \in E(\tilde{E})$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (8)$$

Следствие из теоремы 2.

Для любого элемента $f \in E(\tilde{E})$ его коэффициенты Фурье f_k :

$$f_k \equiv (f, \psi_k) \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty.$$

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

Теперь переформулируем полученные для общих рядов Фурье результаты в случае **тригонометрической системы функций** в пространстве $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (4)$$

Итак, для $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ рассмотрим следующий **тригонометрический ряд Фурье** (ТРФ):

$$f_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f'_k \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + f''_k \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right), \quad (9)$$

где

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

$$f'_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad f''_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt.$$

Неравенство Бесселя (8) приобретает вид

$$f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} ((f'_k)^2 + (f''_k)^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (10)$$

§ 1. Задача о наилучшем приближении. Общие ряды Фурье.

Введем теперь для ТРФ

$$f_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f'_k \cdot \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + f''_k \cdot \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right), \quad (9)$$

новые константы

$$a_0 = \frac{2f_0}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$
$$a_k = \frac{f'_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{f''_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt.$$

Тогда ТРФ примет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (11)$$

а неравенство Бесселя – вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad (12)$$

$$a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty.$$

§ 2. Замкнутые и полные ортонормированные системы

2.1. Замкнутые системы

Рассмотрим пространство $E(\tilde{E})$ и в нем произвольную систему $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Опр. 1. Система $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется **замкнутой** в $E(\tilde{E})$, если

$\forall f \in E(\tilde{E}) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} :$

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \psi_k - f \right\| < \varepsilon. \quad (1)$$

Отметим, что замкнутость не означает существование ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k,$$

сходящегося к f по норме. С изменением точности $\varepsilon > 0$ в (1) может меняться не только $n \in \mathbb{N}$, но и (полностью!) набор коэффициентов $c_1, \dots, c_n$.

Теорема 3.

Если ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $E(\tilde{E})$, то для любого $f \in E(\tilde{E})$ неравенство Бесселя переходит в точное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2 \quad (2)$$

(называемое **равенством Парсеваля**).

Доказательство. В силу замкнутости: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$

$$\left\| \sum_{k=1}^N c_k \psi_k - f \right\|^2 < \varepsilon^2.$$

Из неравенства (6.1) после теоремы 1 о наилучшем приближении

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^N c_k \psi_k - f \right\|^2 < \varepsilon^2,$$

где f_k – коэффициенты Фурье для f . Тогда для $\forall n \geq N$ справедливо

$$0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^N f_k^2 < \varepsilon^2. \quad \blacksquare$$

Теорема 4.

Если ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в $E(\tilde{E})$, то для любого $f \in E(\tilde{E})$ его ряд Фурье сходится к f по норме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\| = 0. \quad (3)$$

Доказательство. В силу тождества Бесселя (7) теоремы 1 о наилучшем приближении

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2,$$

а правая часть здесь стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. ■

Итак, для ответа на вопрос о сходимости ТРФ осталось установить, что *тригонометрическая система функций замкнута* в $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$. Тогда из теоремы 4 будет следовать его сходимость по норме $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$, т.е. *сходимость в среднем*.

2.2. Полнота системы

Рассмотрим пространство $E(\tilde{E})$ и в нем произвольную систему $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Опр. 2. Система $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется **полной** в $E(\tilde{E})$, если из равенств $(f, \psi_k) = 0 \forall k$ следует, что $f = \theta$.

Теорема 5.

В E любая замкнутая ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна.

Доказательство. В силу теоремы 3

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2.$$

Если элемент f имеет только нулевые коэффициенты Фурье, то ряд в левой части равен $0 \Rightarrow \|f\| = 0 \Rightarrow f = \theta$. ■

Отметим, что обратное утверждение, вообще говоря неверно. Однако, если E – гильбертово пространство, то из полноты ОНС следует ее замкнутость в E .

Теорема 6.

Для любой полной ОНС $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ два различных элемента $f, g \in E$ не могут иметь одинаковые ряды Фурье.

Доказательство. Пусть $f, g \in E$: $f_k = g_k \forall k$. Тогда

$$(f, \psi_k) = (g, \psi_k) \forall k \Rightarrow (f - g, \psi_k) = 0 \forall k \Rightarrow f - g = \theta. \blacksquare$$

§ 3. Сходимость средних Чезаро тригонометрического ряда Фурье

§ 3. Сходимость средних Чезаро ТРФ.

Рассмотрим $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, для которых существуют $f(-\pi + 0)$, $f(\pi - 0)$, и соответствующий ТРФ:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (1)$$

Так как слагаемые правой части 2π -периодические функции на $\mathbb{R}$, то естественно перейти в левой части от $f(x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, к ее периодическому продолжению на $\mathbb{R}$.

Опр. Функция $F(x)$ называется **периодическим продолжением** $f(x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, на $\mathbb{R}$, если

- ▶ $F(x) = f(x)$, $-\pi < x < \pi$;
- ▶ $F(-\pi) = F(\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))$;
- ▶ $F(x + 2\pi) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем сохраним для периодического продолжения функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ ее исходное обозначение: $f(x)$.

§ 3. Сходимость средних Чезаро ТРФ.

Отметим простое свойство интеграла от 2π -периодической функции.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t) dt &= \int_{-\pi-x}^{-\pi} f(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \int_{\pi}^{\pi-x} f(t) dt = \\ &= \int_{\pi-x}^{\pi} f(t-2\pi) dt + \int_{\pi}^{\pi-x} f(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

или

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

§ 3. Сходимость средних Чезаро ТРФ.

3.1. Интегральное представление для частичных сумм ТРФ.

Рассмотрим

$$S_n(x, f) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n \geq 1,$$
$$S_0(x, f) = \frac{a_0}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_n(x, f) &= \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ky dy + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ky dy \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(y-x) \right\} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right\} dt. \end{aligned}$$

§ 3. Сходимость средних Чезаро ТРФ.

Так как

$$\left\{ \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt \right\} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} = \sin(n + \frac{1}{2})t,$$

то

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \quad (4)$$

или

$$S_n(x, f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \quad (5)$$

где

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2\pi \sin \frac{t}{2}} \quad (6)$$

– так называемое **ядро Дирихле**.

§ 3. Сходимость средних Чезаро ТРФ.

Отметим два свойства ядра Дирихле.

Лемма 1.

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим ТРФ для функции $f(x) \equiv 1$. Так как $f(x) \equiv 1$ ортогональна всем синусам $\sin kx$ и косинусам $\cos kx$ в тригонометрической системе, то

$$a_k = b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 1.$$

Из интегрального представления (5) сразу следует (7). ■

Лемма 2.

$$S_n(x, f) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) [f(x+t) - f(x)] dt \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Литература:

1. В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Математический анализ, т.2. – Глава 8, §2.
2. В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Основы математического анализа, т.2. – Глава 10, §2.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Тема: РЯДЫ ФУРЬЕ (лекция 3)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент **Крицков Леонид Владимирович**

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

08 апреля 2020 г.

§ 3. Сходимость средних Чезаро тригонометрического ряда Фурье (продолжение)

3.2. Интегральное представление для средних Чезаро ТРФ

3.2. Интегральное представление для средних Чезаро ТРФ.

Суммирование рядов методом средних арифметических (метод Чезаро)

Пусть дан ряд

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} u_k,$$

частичные суммы которого

$$S_0 = u_0, S_1 = u_0 + u_1, S_2 = u_0 + u_1 + u_2, \dots, S_{n-1} = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}, \dots$$

образуют сходящуюся или расходящуюся последовательность.

Говорят, что ряд **суммируем методом Чезаро**, если последовательность средних арифметических

$$\sigma_1 = S_0, \sigma_2 = \frac{1}{2}(S_0 + S_1), \sigma_3 = \frac{1}{3}(S_0 + S_1 + S_2), \dots, \sigma_n = \frac{1}{n}(S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}), \dots$$

сходится, а ее предел A называется **обобщенной суммой** рассматриваемого ряда.

Данный метод суммирования является **регулярным**, так как если исходный ряд сходится к S , то и обобщенная сумма ряда равна S .

§ 3. Сходимость средних Чезаро ТРФ.

Для тригонометрического ряда

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

рассмотрим его частичные суммы

$$S_0(x, f) = \frac{a_0}{2}, \quad S_n(x, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n \geq 1,$$

и построим последовательность их средних арифметических

$$\begin{aligned} \sigma_1(x, f) &= S_0(x, f), \quad \sigma_2(x, f) = \frac{1}{2}(S_0(x, f) + S_1(x, f)), \dots, \\ \sigma_n(x, f) &= \frac{1}{n}(S_0(x, f) + S_1(x, f) + \dots + S_{n-1}(x, f)), \dots \end{aligned}$$

§ 3. Сходимость средних Чезаро ТРФ.

Получим компактное представление для средних Чезаро $\sigma_n(x, f)$.

Используем представление для $S_n(x, f)$:

$$S_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt. \quad (4)$$

Тогда

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x, f) = \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right\} dt.$$

§ 3. Сходимость средних Чезаро ТРФ.

Так как

$$\left\{ \sin \frac{1}{2}t + \sin \frac{3}{2}t + \dots + \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)t \right\} \cdot 2 \sin \frac{t}{2} = 1 - \cos nt = 2 \sin^2 \frac{nt}{2},$$

то

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt \quad (9)$$

или

$$\sigma_n(x, f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \Phi_n(t) dt, \quad (10)$$

где

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \quad (11)$$

— так называемое **ядро Фейера**.

Лемма 1.

Ядро Фейера обладает следующими свойствами:

- ▶ $\Phi_n(t)$ неотрицательно и четно на $[-\pi, \pi]$;
- ▶ для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = 1; \quad (12)$$

- ▶ для любого $\delta \in (0, \pi)$:

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t) dt = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t) dt \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Доказательство. Рассмотрим ТРФ для функции $f(x) \equiv 1$. Тогда $S_n(x, f) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$, и следовательно, $\sigma_n(x, f) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Из интегрального представления (10) сразу следует (12).

Если $t \in [\delta, \pi]$, то

$$\Phi_n(t) \leq \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Лемма 1.

Ядро Фейера обладает следующими свойствами:

- ▶ $\Phi_n(t)$ неотрицательно и чётно на $[-\pi, \pi]$;
- ▶ для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = 1; \quad (12)$$

- ▶ для любого $\delta \in (0, \pi)$:

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t) dt = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t) dt \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Лемма 2.

$$\sigma_n(x, f) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) [f(x+t) - f(x)] dt \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

3.3. Теорема о равномерной сходимости средних Чезаро ТРФ.

Теорема 7 (Фейер).

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то равномерно на $[-\pi, \pi]$

$$\sigma_n(x, f) \Rightarrow f(x). \quad (15)$$

§ 3. Сходимость средних Чезаро ТРФ.

Доказательство теоремы 7.

1) Продолжим $f(x)$ периодически на $\mathbb{R}$, тогда, так как $f(-\pi) = f(\pi)$, то это продолжение $f(x)$ – непрерывная функция на $\mathbb{R}$ и, кроме того, **равномерно непрерывная на $\mathbb{R}$** . Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in (0, \pi) : \forall x \in \mathbb{R} \forall t \in [-\delta, \delta] \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \sigma_n(x, f) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) [f(x+t) - f(x)] dt = \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) [f(x+t) - f(x)] dt + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \Phi_n(t) [f(x+t) - f(x)] dt \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

$$3) \quad |I_1| \leq \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

§ 3. Сходимость средних Чезаро ТРФ.

$$4) \quad |I_2| \leq \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \Phi_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt \leq 2M \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \Phi_n(t) dt = 4M \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $n \geq N$, если N выбрано достаточно большим.

Итак,

$$|\sigma_n(x, f) - f(x)| < \varepsilon$$

при $n \geq N$ сразу для всех $x \in \mathbb{R}$. ■

Замечание. Условия теоремы 7 в определенном смысле являются **необходимыми**:

если $\sigma_n(x, f)$ для некоторой $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ к $f(x)$, то

- ▶ $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$;
- ▶ $f(-\pi) = f(\pi)$.

3.4. Локальная теорема Фейера.

Итак, доказано, что для $f(x) \in C[-\pi, \pi]$: $f(-\pi) = f(\pi)$ средние Чезаро ТРФ $\sigma_n(x, f)$ **сходятся равномерно** на $[-\pi, \pi]$ к разлагаемой функции $f(x)$.

Новый вопрос: Как ведут себя средние Чезаро $\sigma_n(x, f)$, если $f(x)$ лишь интегрируема на $[-\pi, \pi]$?

Теорема 8 (Фейер).

Пусть функция $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ и 2π -периодически продолжена на $\mathbb{R}$.

Пусть в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ существуют предельные значения $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$.

Тогда в этой точке x_0 :

$$\sigma_n(x_0, f) \rightarrow \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)] \quad n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Доказательство теоремы 8.

Положим $\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$ и примем во внимание, что

- ▶ $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$: $|f(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{R}$;
- ▶ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall t \in (0, \delta) \Rightarrow |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| < \frac{\varepsilon}{4}$;
- ▶ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall t \in (-\delta, 0) \Rightarrow |f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Проанализируем разность $\sigma_n(x_0, f) - \tilde{f}(x_0)$ с помощью представления (14):

$$\begin{aligned}
 \sigma_n(x_0, f) - \tilde{f}(x_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) [f(x_0 + t) - \tilde{f}(x_0)] dt = \\
 &= \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \Phi_n(t) [f(x_0 + t) - \tilde{f}(x_0)] dt + \\
 &+ \int_0^{\delta} \Phi_n(t) f(x_0 + t) dt + \int_{-\delta}^0 \Phi_n(t) f(x_0 + t) dt - \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)] \cdot 2 \int_0^{\delta} \Phi_n(t) dt = \\
 &= I_1 + \int_0^{\delta} \Phi_n(t) [f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)] dt + \int_{-\delta}^0 \Phi_n(t) [f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)] dt = \\
 &= I_1 + I_2 + I_3.
 \end{aligned}$$

§ 3. Сходимость средних Чезаро ТРФ.

Тогда

$$|I_2| \leq \int_0^{\delta} \Phi_n(t) |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_0^{\delta} \Phi_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$|I_3| \leq \int_{-\delta}^0 \Phi_n(t) |f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4} \int_{-\delta}^0 \Phi_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$|I_1| \leq \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \Phi_n(t) |f(x_0 + t) - \tilde{f}(x_0)| dt \leq 4M \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } n \geq N.$$

Таким образом,

$$|\sigma_n(x_0, f) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon,$$

если $n \geq N$, где N достаточно велико. ■

§ 3. Сходимость средних Чезаро ТРФ.

Итак, установлено, что:

- ▶ если $f(x) \in C[-\pi, \pi]$: $f(-\pi) = f(\pi)$, то средние Чезаро ТРФ $\sigma_n(x, f)$ **сходятся равномерно** на $[-\pi, \pi]$ к разлагаемой функции $f(x)$;
- ▶ если $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, то в каждой точке $x = x_0$ непрерывности или разрыва 1 рода средние Чезаро ТРФ $\sigma_n(x_0, f)$ **сходятся** к числу $\frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$.

Ответим с помощью локальной теоремы Фейера на следующий **вопрос**:

если ТРФ сходится в точке $x = x_0$, то чему равен этот предел ?

Следствие теоремы 8.

Пусть функция $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ и 2π -периодически продолжена на $\mathbb{R}$.

Пусть, кроме того, известно, что

- ▶ ТРФ функции $f(x)$ сходится в точке $x = x_0$;
- ▶ в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ либо непрерывна, либо имеет разрыв 1 рода.

Тогда ТРФ в точке $x = x_0$ сходится

либо к $f(x_0)$, либо к $\frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$ соответственно.

Доказательство: $\sigma_n(x_0, f) \rightarrow \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$. В силу регулярности метода Чезаро $\Rightarrow$ ■

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы.

Рассмотрим тригонометрическую систему функций в пространстве $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (1)$$

Для краткости любую конечную линейную комбинацию функций системы (1) будем называть **тригонометрическим многочленом**.

Тригонометрическими многочленами являются, например,

- ▶ частичные суммы ТРФ $S_n(x, f)$;
- ▶ средние Чезаро ТРФ $\sigma_n(x, f)$;
- ▶ степени тригонометрических функций $\sin^n x, \cos^n x, n \in \mathbb{N}$ (проверьте!);
- ▶ функции вида $P(\sin x, \cos x)$, где $P(t_1, t_2)$ – многочлен от двух переменных t_1, t_2 (проверьте!).

Теорема 9.

Система (1) замкнута в пространстве $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$, т.е. для $\forall f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ и $\forall \varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$:

$$\|f(x) - T(x)\| < \varepsilon. \quad (2)$$

Доказательство теоремы 9 реализуем в три этапа.

Для $\forall f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ и $\forall \varepsilon > 0$

- ▶ построим **кусочно-постоянную функцию** $f_1(x)$ такую, что

$$\|f(x) - f_1(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad (3)$$

- ▶ построим **непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию** $g(x)$ такую, что $g(-\pi) = g(\pi)$ и

$$\|f_1(x) - g(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad (4)$$

- ▶ укажем **тригонометрический многочлен** $T(x)$ такой, что

$$\|g(x) - T(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5)$$

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы.

1. Построение кусочно-постоянной функции $f_1(x)$

В силу интегрируемости функция $f(x)$ ограничена, т.е. $|f(x)| \leq M \forall x \in [-\pi, \pi]$, и по критерию Дарбу для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ разбиение: $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$ такое, что

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon_1 = \varepsilon^2/(18M), \quad (6)$$

где $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$.

Введем кусочно-постоянную функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} m_1, & x \in [x_0, x_1], \\ m_k, & x \in (x_{k-1}, x_k] \quad \forall k = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Тогда неравенство (6) примет вид

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) dx < \varepsilon_1 = \varepsilon^2/(18M). \quad (7)$$

Из неравенства (7) следует

$$\begin{aligned}\|f(x) - f_1(x)\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_1(x))^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_1(x))(|f(x)| + |f_1(x)|) dx \leq \\ &\leq 2M \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_1(x)) dx < \frac{\varepsilon^2}{9}.\end{aligned}$$

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы.

2. Для построения **непрерывной функции** $g(x)$ модифицируем кусочно-постоянную функцию $f_1(x)$ в точках ее разрыва, а также в точке $x = \pi$, если $f_1(\pi) \neq f_1(-\pi)$.

Пусть в некоторой окрестности точки разрыва $x = x_k$:

$$f_1(x) = \begin{cases} m_k, & x \leq x_k, \\ m_{k+1}, & x > x_k, \end{cases}$$

и $m_{k+1} \neq m_k$.

Перейдем к непрерывной функции следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} m_k, & x \leq x_k, \\ m_k + \frac{m_{k+1} - m_k}{h}(x - x_k), & x \in (x_k, x_k + h), \\ m_{k+1}, & x \geq x_k + h, \end{cases}$$

т.е. уберем разрыв, используя линейную функцию в качестве «вставки» на интервале $(x_k, x_k + h)$ достаточно малой длины h .

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы.

Тогда, очевидно, получим

$$\int_{x_k}^{x_k+h} |g(x) - f_1(x)| dx \leq \frac{h}{2} |m_{k+1} - m_k| \leq Mh,$$

а, значит, как на первом этапе доказательства,

$$\int_{x_k}^{x_k+h} (g(x) - f_1(x))^2 dx \leq 2M \cdot Mh = 2M^2h.$$

Таким образом, такая модификация функции $f_1(x)$ в окрестностях точек ее разрыва приводит к неравенству

$$\|g(x) - f_1(x)\|^2 \leq 2nM^2h \quad (n - \text{максимально возможное число точек разрыва})$$

правую часть которого можно сделать меньше $\frac{\varepsilon^2}{9}$ за счет выбора h .

3. Выбор **тригонометрического многочлена** $T(x)$ непосредственно следует из теоремы Фейера.

Действительно, для построенной функции $g(x) \in C[-\pi, \pi]$, $g(-\pi) = g(\pi)$ возьмем в качестве $T(x)$ средние Чезаро $\sigma_n(x, g)$ с достаточно большим номером n . Тогда неравенство

$$\|g(x) - T(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (5)$$

будет следовать из того, что равномерная сходимость средних $\sigma_n(x, g)$ к $g(x)$ на $[-\pi, \pi]$ обеспечивает их сходимость в среднем. ■

Следствия замкнутости тригонометрической системы в $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$

1. Система (1) замкнута в пространстве непрерывных функций $C[-\pi, \pi]$ и в пространстве кусочно-непрерывных функций $E_0[-\pi, \pi]$.
2. Система (1) полна в пространствах $C[-\pi, \pi]$ и $E_0[-\pi, \pi]$.

3. Система

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (6)$$

полна в пространстве $E_0[0, \pi]$ и в пространстве $E_0[-\pi, 0]$.

4. Система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (7)$$

полна в пространстве $E_0[0, \pi]$ и в пространстве $E_0[-\pi, 0]$.

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы.

Доказательство следствия 3.

Пусть $f(x) \in E_0[0, \pi]$ ортогональна всем функциям системы (6), т.е.

$$\int_0^{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Продолжим $f(x)$ нечетным образом на $[-\pi, 0]$ и переопределим ее, при необходимости, в точке $x = 0$, положив $f(0) = 0$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и, кроме того,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx = 0 \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

в силу нечетности подынтегральной функции.

Тем самым, $f(x) \in E_0[-\pi, \pi]$ ортогональна всем функциям тригонометрической системы (1) и, значит, в силу ее полноты $f(x) \equiv 0$. ■

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы.

5. Для коэффициентов Фурье любой функции $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ выполнено равенство Парсеваля:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (8)$$

6. ТРФ любой функции $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ сходится к $f(x)$ в среднем.

7. ТРФ любой функции $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ можно почленно интегрировать по $[-\pi, \pi]$ или по любой его части.

8. Если две функции $f(x), g(x) \in E_0[-\pi, \pi]$ имеют одинаковые ряды Фурье, то $f(x) \equiv g(x)$.

9. Если ТРФ функции $f(x) \in E_0[-\pi, \pi]$ сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$ или на какой-либо его части $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, то ТРФ сходится именно к $f(x)$.

Доказательство следствия 9.

Пусть $S_n(x, f) \Rightarrow g(x) \Rightarrow \|S_n(x, f) - g(x)\| \rightarrow 0$.

Но в силу следствия 6 $\|S_n(x, f) - f(x)\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|f(x) - g(x)\| \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \equiv g(x)$. ■

10. Теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций многочленами

Теорема 10.

Для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $P(x)$ такой, что

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]. \quad (9)$$

Замечание.

Текущее изложение – следствие результатов Л.Фейера (1904).

К.Вейерштрасс (1885) – первым доказал эту теорему как следствие своих исследований специального интегрального преобразования.

С.Н.Бернштейн (1912) предложил конструктивное построение аппроксимирующего многочлена $P(x)$.

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы.

Доказательство.

Выполним линейное преобразование аргумента x по формуле: $x = a + \frac{b-a}{\pi}t$.

Тогда $f(x) = f(a + \frac{b-a}{\pi}t) \equiv g(t)$, причем новая функция $g(t)$ будет непрерывной на $[0, \pi]$.

Продолжим функцию $g(t)$ четным образом на $[-\pi, 0]$. Тогда

$$g(t) \in C[-\pi, \pi], \quad g(-\pi) = g(\pi).$$

Как и в доказательстве теоремы 9, возьмем средние Чезаро $T(t) = \sigma_n(t, g)$ с настолько большим номером n , чтобы

$$|g(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [-\pi, \pi]. \quad (10)$$

Теперь, в свою очередь, тригонометрический многочлен $T(t)$ разложим в сходящийся при всех $t \in \mathbb{R}$ ряд Тейлора и выберем его частичную сумму $Q_n(t)$ так, чтобы

$$|T(t) - Q_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in [-\pi, \pi]. \quad (11)$$

Тогда

$$|g(t) - Q_n(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

или, в терминах исходной переменной x ,

$$\left| f(x) - Q_n\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]. \quad (12)$$

Последнее неравенство совпадает с требуемым неравенством (9), так как

$P(x) = Q_n\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$ – многочлен. ■

Изучение **сходимости** самого тригонометрического ряда Фурье
– **равномерной и в каждой точке** –
продолжим на следующей лекции.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Тема: РЯДЫ ФУРЬЕ (лекция 4)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент **Крицков Леонид Владимирович**

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

08 апреля 2020 г.

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса (окончание)

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы.

Итак, для ТРФ для функции $f(x)$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1)$$

показано, что если $f(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$, в котором норма (полунорма) задается

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad (2)$$

то ТРФ (1) сходится к $f(x)$ в среднем, т.е. его **частичные суммы** $S_n(x, f)$ **сходятся к $f(x)$ по норме (2)**:

$$\|S_n(x, f) - f(x)\|_2 \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Можно доказать, что для нормы

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p > 1, \quad (4)$$

справедлив такой же **согласованный** результат:

$$\|S_n(x, f) - f(x)\|_p \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Отметим, что сходимость ТРФ в среднем (3) вовсе не означает его сходимости даже в какой-либо точке на $[-\pi, \pi]$.

Так что вопрос о сходимости ТРФ в точке и на множестве пока остается открытым.

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы.

Попробуем сформулировать аналогичный **согласованный** «результат», используя другую норму.

Рассмотрим все непрерывные функции $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$, которые таковы, что $f(-\pi) = f(\pi)$. Они образуют бесконечномерное линейное пространство – обозначим его $C_*[-\pi, \pi]$. Введем

$$\|f(x)\|_* = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|. \quad (6)$$

Нам известно, что при $n \rightarrow \infty$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_* \rightarrow 0 \iff f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на } [-\pi, \pi],$$

и можно показать, что (6) задает норму в пространстве $C_*[-\pi, \pi]$.

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы.

Имеет ли место в данном случае такая же **согласованность** сходимости ТРФ, т.е. если $f(x) \in C_*[-\pi, \pi]$, то **верно ли**:

$$\|S_n(x, f) - f(x)\|_* \rightarrow 0 \iff S_n(x, f) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на } [-\pi, \pi]. \quad (7)$$

Результат (7) нами не был доказан. Равномерная сходимость была доказана лишь для **средних Чезаро** (теорема Фейера):

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x, f) \Rightarrow \|\sigma_n(x, f) - f(x)\|_* \rightarrow 0.$$

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы.

Оказывается, что доказать для любой непрерывной функции $f(x)$ равномерную сходимость ТРФ (и даже сходимость ТРФ в какой-либо точке) **принципиально невозможно**.

- ▶ [Дюбуа-Реймон, 1876] $\exists f(x) \in C_*[-\pi, \pi]$: ее ТРФ **расходится** на множестве точек, всюду плотно покрывающем $[-\pi, \pi]$;
- ▶ [Лебег, 1909] причина – в свойствах ядра Дирихле $D_n(t)$:

$$S_n(x, f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$$

В отличие от ядра Фейера $\Phi_n(t)$, порождающего по той же формуле средние Чезаро:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) dt = 1 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_n(t)| dt = 1, \quad \text{так как } \Phi_n(t) \geq 0,$$

для ядра Дирихле

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1, \quad \text{но} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n.$$

§ 4. Замкнутость тригонометрической системы.

У вопроса сходимости ТРФ в точках $[-\pi, \pi]$ своя история.

- ▶ [Колмогоров, 1926] $\exists f(x)$, допускающая существование понимаемого в смысле Лебега интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty,$$

для которой ТРФ **расходится в каждой точке** $[-\pi, \pi]$;

- ▶ [Карлесон, 1966] для любой $f(x)$, допускающей существование интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

ее ТРФ **сходится почти всюду** на $[-\pi, \pi]$.

Вывод

Для того, чтобы ТРФ функции $f(x)$ сходилась равномерно или в точке, от функции $f(x)$ **необходимо требовать большего, чем просто ее непрерывность** на $[-\pi, \pi]$.

§ 5. Простейшие условия равномерной сходимости ТРФ

Опр. Функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ **кусочно-непрерывную производную**, если

- ▶ $f'(x)$ существует и непрерывна на всем (a, b) , кроме, быть может, конечного числа точек $x_k \in (a, b)$, в которых существуют $f'(x_k \pm 0)$,
- ▶ существуют $f'(a + 0)$ и $f'(b - 0)$.

Считаем, что в каждой точке x_k :

$$f'(x_k) = \frac{1}{2} \left(f'(x_k + 0) + f'(x_k - 0) \right).$$

Примеры:

1. Функция $f(x) = |x|$ на $[-1, 1]$

- ▶ $f'(x)$ существует и непрерывна для всех $x \neq 0$; $f'(-1+0) = -1$, $f'(1-0) = 1$;
- ▶ в точке $x_1 = 0$: существуют $f'(0-0) = -1$, $f'(0+0) = 1$.

Таким образом, $f'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ на $[-1, 1]$.

2. Функция $f(x) = \{x\}$ на $[0, 2]$ (дробная часть числа)

- ▶ $f'(x)$ существует и непрерывна для всех $x \neq 1$; $f'(0+0) = 1$, $f'(2-0) = 1$;
- ▶ в точке $x_1 = 1$: существуют $f'(1-0) = 1$, $f'(1+0) = 1$.

Таким образом, $f'(x) = 1$ на $[0, 2]$.

Теорема 11.

Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ и $f(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную на $[-\pi, \pi]$.

Тогда ТРФ для $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[-\pi, \pi]$, причем эта сходимость абсолютная, т.е. ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n \cos nx| + |b_n \sin nx|) \quad (8)$$

равномерно сходится на $[-\pi, \pi]$.

§ 5. Простейшие условия равномерной сходимости ТРФ.

Доказательство.

Достаточно доказать равномерную сходимость только ряда (8):

- из этого будет следовать равномерная сходимость самого ТРФ,
- а значит, сходится ТРФ будет именно к разлагаемой функции $f(x)$ (см. §4).

Воспользуемся признаком Вейерштрасса, т.е. докажем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|). \quad (9)$$

Рассмотрим коэффициенты Фурье:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx.$$

§ 5. Простейшие условия равномерной сходимости ТРФ.

Тогда, если $x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1}$ – точки разрыва $f'(x)$, а также $x_0 = -\pi$, $x_m = \pi$, то

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \int_{x_{k-1}}^{x_k} \cos nx \, df(x) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \left\{ f(x_k) \cos nx_k - f(x_{k-1}) \cos nx_{k-1} + n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \sin nx \, dx \right\} = \\ &= \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx + \\ &+ \left\{ f(x_1) \cos nx_1 - f(x_0) \cos nx_0 + f(x_2) \cos nx_2 - f(x_1) \cos nx_1 + \dots \right. \\ &\left. \dots + f(x_m) \cos nx_m - f(x_{m-1}) \cos nx_{m-1} \right\} = nb_n - f(-\pi) \cos n\pi + f(\pi) \cos n\pi = nb_n.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\beta_n = -na_n.$$

§ 5. Простейшие условия равномерной сходимости ТРФ.

Итак, получим следующее:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\alpha_n|}{n} + \frac{|\beta_n|}{n} \right) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} |\alpha_n|^2 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2} |\beta_n|^2 + \frac{1}{2n^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\end{aligned}$$

в силу числового неравенства $2xy \leq x^2 + y^2$ и неравенства Бесселя. ■

Почленное дифференцирование ТРФ

Теорема 12.

Пусть функции $f(x), f'(x), \dots, f^{(m)}(x)$ непрерывны на $[-\pi, \pi]$ и $f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi)$ для всех $k = 0, 1, \dots, m$.

Пусть также $f^{(m)}(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную на $[-\pi, \pi]$.

Тогда ТРФ для $f(x)$ можно m раз почленно дифференцировать на $[-\pi, \pi]$.

§ 5. Простейшие условия равномерной сходимости ТРФ.

Доказательство.

Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Выполним формальное почленное дифференцирование этого ряда

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(a_n \cos\left(nx - \frac{\pi k}{2}\right) + b_n \sin\left(nx - \frac{\pi k}{2}\right) \right), \quad k = 1, \dots, m,$$

и докажем, что при $k = m$ этот ряд равномерно сходится на $[-\pi, \pi]$, так как мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m (|a_n| + |b_n|). \quad (10)$$

По известной теореме это и позволит обосновать возможность почленного дифференцирования.

§ 5. Простейшие условия равномерной сходимости ТРФ.

Пусть α_n и β_n – коэффициенты Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x) \cos nx \, dx, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m+1)}(x) \sin nx \, dx.$$

Тогда, проводя $(m+1)$ раз интегрирование по частям в этих интегралах, получим соотношение:

$$|\alpha_n| + |\beta_n| = n^{m+1} (|a_n| + |b_n|),$$

а, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^m (|a_n| + |b_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\alpha_n|}{n} + \frac{|\beta_n|}{n} \right) < \infty,$$

как в доказательстве предыдущей теоремы. ■

Оценка скорости сходимости ТРФ

Теорема 13.

Пусть выполнены все условия теоремы 11.

Тогда справедлива оценка

$$|S_n(x, f) - f(x)| \leq \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}} \quad \forall x \in [-\pi, \pi], \quad (11)$$

где $\gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

§ 5. Простейшие условия равномерной сходимости ТРФ.

Доказательство.

Используем известное неравенство Коши-Буняковского для сумм

$$\sum_{n=1}^N |c_n d_n| \leq \left(\sum_{n=1}^N c_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^N d_n^2 \right)^{1/2},$$

из которой следует, что если при $N \rightarrow \infty$ ряды в правой части сходятся, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n d_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \right)^{1/2}.$$

Проведем теперь необходимую оценку

$$\begin{aligned} |S_n(x, f) - f(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|\alpha_k|}{k} + \frac{|\beta_k|}{k} \right) \leq \\ &\leq \left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k^2 \right)^{1/2} \right] \cdot \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \equiv \gamma_n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

§ 5. Простейшие условия равномерной сходимости ТРФ.

Теперь, в силу монотонного убывания функции $y = x^{-2}$ на $(0, +\infty)$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{k-1}^k dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2} = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$|S_n(x, f) - f(x)| \leq \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}} \quad \forall x \in [-\pi, \pi]. \quad \blacksquare$$

§ 6. Уточнение условий сходимости ТРФ. Принцип локализации

1. Свойства коэффициентов Фурье

Было доказано, что если $f(x) \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, то ее коэффициенты Фурье a_n и b_n :

$$a_n, b_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Установим аналогичное свойство для **функций двух переменных** $F(x, t)$.

Рассмотрим функцию $F(x, t) = f(x + t)g(t)$, где

- ▶ $f(t)$ – 2π -периодическая функция, интегрируемая на $[-\pi, \pi]$;
- ▶ функция $g(t)$ интегрируема на $[-\pi, \pi]$,

и ее коэффициенты Фурье

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, t) \cos nt \, dt, \quad b_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, t) \sin nt \, dt. \quad (12)$$

Лемма 1.

- 1) Функция $I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F(x, t) dt$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ (и на $\mathbb{R}$).
- 2) Коэффициенты Фурье $a_n(x), b_n(x)$ равномерно стремятся к нулю на $[-\pi, \pi]$.

Доказательство.

- 1) Рассмотрим разность

$$I(x+h) - I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+h+t) - f(x+t))g(t) dt.$$

Тогда

$$|I(x+h) - I(x)| \leq M \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h+t) - f(x+t)| dt = M \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+h) - f(t)| dt. \quad (13)$$

§ 6. Уточнение условий сходимости ТРФ. Принцип локализации.

Приближим $f(t)$ тригонометрическим многочленом $T(t)$ по норме $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}\|f(t) - T(t)\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{18\pi M^2} \\ \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)| dt &\leq \|f(t) - T(t)\| \cdot \sqrt{2\pi} < \frac{\varepsilon}{3M}.\end{aligned}$$

Оценим теперь правую часть (13):

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+h) - f(t)| dt &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+h) - T(t+h)| dt + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t+h) - T(t)| dt + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} |T(t) - f(t)| dt < \frac{2\varepsilon}{3M} + \int_{-\pi}^{\pi} |T(t+h) - T(t)| dt.\end{aligned}$$

Последний интеграл можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{3M}$ за счет выбора $\delta > 0$ и рассмотрения любых $h : |h| < \delta$ в силу равномерной непрерывности $T(t)$ на $\mathbb{R}$.

§ 6. Уточнение условий сходимости ТРФ. Принцип локализации.

2. Выпишем для $F(x, t)$ равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2(x) + b_n^2(x)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^2(x, t) dt. \quad (14)$$

► Функции

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \cos nt dt, \quad b_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) g(t) \sin nt dt,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F^2(x, t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t) g^2(t) dt$$

непрерывны по переменной $x \in [-\pi, \pi]$.

► Слагаемые левой части неотрицательны.

[По признаку Дини] Функциональный ряд в (14) сходится равномерно на $[-\pi, \pi]$

⇒

$$a_n(x), b_n(x) \Rightarrow 0 \quad \text{на } [-\pi, \pi] \quad \blacksquare$$

2. Выделение главной части частичных сумм ТРФ

Рассмотрим

$$S_n(x, f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \quad D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2\pi \sin \frac{t}{2}}.$$

Тогда при $\forall \delta \in (0, \pi)$:

$$\begin{aligned} S_n(x, f) &= \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) D_n(t) dt + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} f(x+t) \frac{1}{2\pi \sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})t dt = \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) D_n(t) dt + r_n(x). \end{aligned}$$

Тогда

$$r_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt,$$

где

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}, & \text{если } \delta \leq |t| \leq \pi, \\ 0, & \text{если } -\delta < t < \delta, \end{cases}$$

интегрируема на $[-\pi, \pi]$.

Следовательно,

$$r_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot g(t) \cos \frac{t}{2} \cdot \sin nt dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot g(t) \sin \frac{t}{2} \cdot \cos nt dt \Rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Аналогично

$$\begin{aligned} S_n(x, f) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] D_n(t) dt = \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] D_n(t) dt + r_n(x) - f(x) \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Здесь $r_n(x) \Rightarrow 0$ и

$$\left| f(x) \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} D_n(t) dt \right| \leq M \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot g(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Значит, и последнее слагаемое стремится к нулю равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Лемма 2.

Для любого $\delta \in (0, \pi)$ и любой константы A справедливы представления

$$S_n(x, f) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x+t) D_n(t) dt + r_n(x), \quad r_n(x) \Rightarrow 0,$$

$$S_n(x, f) - f(x) = \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] D_n(t) dt + R_n(x), \quad R_n(x) \Rightarrow 0,$$

$$S_n(x_0, f) - A = \int_{-\delta}^{\delta} [f(x_0+t) - A] D_n(t) dt + \tilde{R}_n, \quad \tilde{R}_n \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Анализ полученных представлений

Теорема 14.

(Принцип локализации Римана)

Сходимость или расходимость ТРФ заданной интегрируемой функции $f(x)$ в данной точке (на данном множестве) зависит лишь от поведения $f(x)$ **в сколь угодно малой окрестности** этой точки (этого множества).

Теорема 15.

(Уточненный принцип локализации Римана)

Если 2π -периодическая и интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ **тождественно равна нулю на** $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, то для любого достаточно малого $\delta > 0$ ТРФ функции $f(x)$ **равномерно сходится к нулю на** $[a + \delta, b - \delta]$:

$$S_n(x, f) \Rightarrow f(x) \equiv 0 \quad \text{на } [a + \delta, b - \delta].$$

Уточнение условий **сходимости** тригонометрического ряда
Фурье

– **равномерной и в каждой точке** –
продолжим на следующей лекции.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Тема: РЯДЫ ФУРЬЕ (лекция 5)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент **Крицков Леонид Владимирович**

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

15 апреля 2020 г.

§ 7. Уточнение условий сходимости ТРФ. Классы Гёльдера

7.1. Функциональные классы Гёльдера

Полученные в §5 простейшие условия сходимости ТРФ в точке и на множестве требовали наличия у разлагаемой функции $f(x)$ производной $f'(x)$ во всех точках, кроме, быть может, конечного их числа, где $f'(x)$ имеет разрывы первого рода.

Например, непрерывная функция $f(x) = \sqrt{|x|}$ на $[-\pi, \pi]$ к таковым не относится, так как $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$.

Расширим рассматриваемое множество функций $f(x)$.

Пусть $f(x) \in C[a, b]$. Введем для нее **модуль непрерывности** $\omega(\delta, f)$ – для $\forall \delta > 0$ положим

$$\omega(\delta, f) = \sup_{x, x+t \in [a, b], |t| \leq \delta} |f(x+t) - f(x)|. \quad (1)$$

$$\omega(\delta, f) = \sup_{x, x+t \in [a, b], |t| \leq \delta} |f(x+t) - f(x)|. \quad (1)$$

Свойства модуля непрерывности

1. Точная верхняя грань в (1) достигается [теорема Вейерштрасса]
2. Если $\delta_1 < \delta_2$, то $\omega(\delta_1, f) \leq \omega(\delta_2, f)$
3. При $\delta \rightarrow 0 + 0$ выполнено $\omega(\delta, f) \rightarrow 0$ [теорема Кантора]
4. Если $f(x)$ дифференцируема и $f'(x)$ ограничена, то с некоторой константой $M > 0$

$$\omega(\delta, f) \leq M\delta \quad \forall \delta > 0 \quad (2)$$

[По теореме Лагранжа

$$f(x+t) - f(x) = f'(\xi)t \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| \leq M|t|]$$

§ 7. Уточнение условий сходимости ТРФ. Классы Гёльдера.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) на $[0, 1]$.

Ее производная $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ не ограничена при $x \rightarrow 0 + 0$.

Однако для $\forall t > 0, x \geq 0$:

$$(x+t)^\alpha - x^\alpha = t^\alpha \left(\left(\frac{x}{t} + 1 \right)^\alpha - \left(\frac{x}{t} \right)^\alpha \right).$$

Отметим, что функция $\varphi(h) = (h+1)^\alpha - h^\alpha$ убывает на $[0, +\infty)$, так как

$$\varphi'(h) = \alpha \left((h+1)^{\alpha-1} - h^{\alpha-1} \right) < 0.$$

Следовательно, $\varphi(h) \leq \varphi(0) = 1$

$$\Rightarrow 0 < (x+t)^\alpha - x^\alpha \leq t^\alpha \quad \forall t > 0,$$

причем при $x = 0$ разность $(x+t)^\alpha - x^\alpha = t^\alpha$.

Аналогично для $\forall t < 0$:

$$0 < x^\alpha - (x+t)^\alpha \leq (-t)^\alpha.$$

Итак, для рассматриваемой функции $f(x)$ модуль непрерывности вычисляется по формуле

$$\omega(\delta, f) = \delta^\alpha \quad \forall \delta > 0.$$

Опр. Функция $f(x)$ **удовлетворяет** на $[a, b]$ **условию Гёльдера с показателем** $\alpha \in (0, 1]$, если с некоторой константой $M > 0$ выполнена оценка

$$\omega(\delta, f) \leq M\delta^\alpha \quad \forall \delta > 0. \quad (3)$$

Обозначение: $f(x) \in C^\alpha[a, b]$.

Замечания.

1. Отметим, что для $f(x) \in C^\alpha[a, b]$ выполнено неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|^\alpha \quad \forall x, x+t \in [a, b].$$

2. В случае $\alpha = 1$ условие (3) называют условием Липшица.

3. Если $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$ таковы, что $\alpha_1 < \alpha_2$, то $C^{\alpha_2}[a, b] \subset C^{\alpha_1}[a, b]$.

7.2. Равномерная сходимость ТРФ для функций из классов Гёльдера

Теорема 16.

Пусть $f(x) \in C^\alpha[-\pi, \pi]$, $0 < \alpha \leq 1$, и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ТРФ функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Продолжим $f(x)$ (2π) -периодически на $\mathbb{R}$. Воспользуемся леммой 2:

$$S_n(x, f) - f(x) = \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] D_n(t) dt + R_n(x), \quad (4)$$

где $R_n(x) \Rightarrow 0$ на $[-\pi, \pi]$.

Добавим оценку первого интеграла в (4):

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] D_n(t) dt \right| &\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| \cdot |D_n(t)| dt \leq \\ &\leq M \int_{-\delta}^{\delta} |t|^\alpha \cdot \frac{1}{2\pi |\sin(t/2)|} dt = \frac{M}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{t^\alpha}{\sin(t/2)} dt. \end{aligned}$$

§ 7. Уточнение условий сходимости ТРФ. Классы Гёльдера.

Так как $\sin(t/2) \geq \frac{t}{\pi}$ при $t \in (0, \pi]$, то

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+t) - f(x)] D_n(t) dt \right| \leq M \int_0^{\delta} t^{\alpha-1} dt = \frac{M}{\alpha} \delta^{\alpha}.$$

Окончательно, для $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\frac{M}{\alpha} \delta^{\alpha} < \frac{\varepsilon}{2},$$

и далее выберем N так, чтобы $\forall n \geq N$ и $\forall x \in [-\pi, \pi]$

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Rightarrow |S_n(x, f) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \quad \blacksquare$$

Объединяя результат теоремы 16 и принцип локализации Римана, получим

Теорема 17.

Пусть (2π) -периодическая функция $f(x)$ интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Пусть, кроме того, для некоторого $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$: $f(x) \in C^\alpha[a, b]$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда для любого $\delta \in (0, \frac{b-a}{2})$ ТРФ функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[a + \delta, b - \delta]$.

7.3. Сходимость ТРФ в точке

Опр. Функция $f(x)$ **удовлетворяет в точке x_0 справа [слева] условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$** , если

- ▶ существует $f(x_0 + 0)$ [$f(x_0 - 0)$];
- ▶ для любого достаточно малого $\delta > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| &\leq M t^\alpha \quad \forall t \in (0, \delta) \\ [|f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)| &\leq M t^\alpha \quad \forall t \in (0, \delta)] \end{aligned} \quad (5)$$

Замечание 1. Если $f(x) \in C^{\alpha_1}[a, x_0] \cap C^{\alpha_2}(x_0, b]$, то $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера в точке x_0 слева с показателем α_1 и справа с показателем α_2 .

Замечание 2. Если $f(x)$ имеет в точке x_0 правую [левую] производную, то $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера в точке x_0 справа [слева] с показателем $\alpha = 1$.

Теорема 18.

Пусть (2π) -периодическая и интегрируемая на $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ в некоторой точке x_0 :

- ▶ удовлетворяет условию Гёльдера справа с показателем $\alpha_1 \in (0, 1]$,
- ▶ удовлетворяет условию Гёльдера слева с показателем $\alpha_2 \in (0, 1]$.

Тогда ТРФ функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к значению

$$\tilde{f}(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)].$$

§ 7. Уточнение условий сходимости ТРФ. Классы Гёльдера.

Доказательство. По условию

$$\begin{aligned} |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| &\leq M_1 t^{\alpha_1} \quad \forall t \in (0, \delta_1), \\ |f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)| &\leq M_2 (-t)^{\alpha_2} \quad \forall t \in (-\delta_2, 0). \end{aligned}$$

Тогда, если $M = \max(M_1, M_2)$, $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, то

$$\begin{aligned} |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| &\leq M t^\alpha \quad \forall t \in (0, \delta), \\ |f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)| &\leq M (-t)^\alpha \quad \forall t \in (-\delta, 0). \end{aligned}$$

В силу представления из леммы 2 ($\tilde{R}_n \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} S_n(x_0, f) - \tilde{f}(x_0) &= \int_{-\delta}^{\delta} [f(x_0 + t) - \tilde{f}(x_0)] D_n(t) dt + \tilde{R}_n = \\ &= \int_0^{\delta} f(x_0 + t) D_n(t) dt + \int_{-\delta}^0 f(x_0 + t) D_n(t) dt - \int_0^{\delta} f(x_0 + 0) D_n(t) dt - \int_{-\delta}^0 f(x_0 - 0) D_n(t) dt + \\ &+ \tilde{R}_n = \int_0^{\delta} [f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)] D_n(t) dt + \int_{-\delta}^0 [f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)] D_n(t) dt + \tilde{R}_n. \end{aligned}$$

§ 7. Уточнение условий сходимости ТРФ. Классы Гёльдера.

Далее завершение рассуждения такое же, как в предыдущей теореме:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\delta [f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)] D_n(t) dt \right| &\leq \int_0^\delta M t^\alpha \frac{dt}{2\pi |\sin(t/2)|} \leq \frac{M}{2} \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt = \frac{M}{2\alpha} \delta^\alpha; \\ \left| \int_{-\delta}^0 [f(x_0 + t) - f(x_0 - 0)] D_n(t) dt \right| &\leq \int_{-\delta}^0 M |t|^\alpha \frac{dt}{2\pi |\sin(t/2)|} \leq \frac{M}{2} \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt = \frac{M}{2\alpha} \delta^\alpha; \\ \tilde{R}_n &\rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0$ сначала выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\frac{M}{\alpha} \delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем N так, чтобы $\forall n \geq N$

$$|\tilde{R}_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $n \geq N$

$$|S_n(x_0, f) - \tilde{f}(x_0)| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

7.4. Примеры и заключительные замечания

I. Пример одного ТРФ и связанные с ним результаты.

Построим разложение в ТРФ функции $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$. Из общей теории следует, что

- ▶ в этом разложении коэффициенты $a_n = 0 \ \forall n$,
- ▶ ряд сходится в любой внутренней точке $[-\pi, \pi]$ к функции $f(x)$,
- ▶ в точках $-\pi$ и π ряд сходится к нулю,
- ▶ ряд можно почленно интегрировать на любом интервале из $[-\pi, \pi]$.

а) Коэффициенты Фурье функции $f(x) = x$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0 \quad \forall n,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{-1}{\pi n} x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

ТРФ имеет вид

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin nx}{n} \quad \forall x \in (-\pi, \pi). \quad (6)$$

§ 7. Уточнение условий сходимости ТРФ. Классы Гёльдера.

б) Запишем ТРФ (6) для некоторых частных значений переменной x :

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}; \quad (7)$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} = \frac{\pi}{4}$$

Так как $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ при $n = 2k$ и $\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^k$ при $n = 2k + 1$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}. \quad (8)$$

в) Равенство Парсеваля

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{2}{n} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad [\text{Эйлер, 1735}] \quad (9) \end{aligned}$$

г) Проинтегрируем ряд (6) почленно по отрезку $0 \leq x \leq y$ для каждого $y \in (0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_0^y x dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \int_0^y \sin nx dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{y^2}{4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (\cos ny - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos ny. \end{aligned} \quad (10)$$

В частности, при $y = \pi$ получим

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} ((-1)^n - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (11)$$

Вычислим числовой ряд в разложении (10):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}.$$

§ 7. Уточнение условий сходимости ТРФ. Классы Гёльдера.

Итак, окончательно

$$\frac{y^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos ny, \quad -\pi \leq y \leq \pi. \quad (12)$$

Отметим, что в силу теоремы единственности ряд (12) является ТРФ функции $g(y) = \frac{y^2}{4}$ с коэффициентами

$$A_0 = \frac{\pi^2}{6}, \quad A_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad n \geq 1, \quad B_n = 0 \quad \forall n.$$

Равенство Парсеваля для ряда (12) приводит к тождеству:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{y^4}{16} dy &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Rightarrow \frac{2\pi^4}{80} = \frac{\pi^4}{72} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned} \quad (13)$$

II. ТРФ на произвольном интервале.

Пусть требуется разложить в ТРФ функцию $f(x)$, заданную на произвольном интервале $[-l, l]$, где $l > 0$. Это можно сделать, выполнив замену $x = \frac{l}{\pi} t : [-\pi, \pi] \rightarrow [-l, l]$. Тогда ТРФ для функции $f(\frac{l}{\pi} t)$ на $[-\pi, \pi]$ перейдет в искомое разложение для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right), \quad (14)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos nt \, dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sin nt \, dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx.$$

III. Комплексная форма записи ТРФ.

Рассмотрим на $-\pi \leq x \leq \pi$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Преобразуем его, учитывая следующее соотношение

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \frac{1}{\pi} \left(\cos nx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt + \sin nx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(x-t) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[e^{-in(x-t)} + e^{in(x-t)} \right] dt = \\ &= e^{-inx} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} \, dt + e^{inx} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt \equiv c_{-n} e^{-inx} + c_n e^{inx}. \end{aligned}$$

Если дополнительно принять $c_0 = \frac{1}{2}a_0$, то получим

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}. \quad (15)$$

На этом мы завершаем изучение основ теории рядов Фурье.

Литература:

1. В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Математический анализ, т.2. – Глава 8.
2. В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. Основы математического анализа, т.2. – Глава 10.

Дополнительная литература:

3. Н.К.Бари. Тригонометрические ряды. М., 1961.
4. А.Зигмунд. Тригонометрические ряды, в 2 т. М., 1965.

На следующей лекции мы познакомимся с разложением функций
в **интеграл Фурье**

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Тема: РЯДЫ ФУРЬЕ (лекция 6)

Лектор: к.ф.-м.н., доцент **Крицков Леонид Владимирович**

МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет ВМК

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики

22 апреля 2020 г.

§ 8. Интеграл Фурье

8.1. Формальный переход от рядов Фурье

Пусть функция $f(x)$ задана на $\mathbb{R}$ и на каждом $[-l, l]$ допускает разложение в ТРФ:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right) = \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \cos \frac{\pi n}{l} x \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} \xi d\xi + \frac{1}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \right) = \\
 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} (\xi - x) d\xi = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} (\xi - x) d\xi. \quad (1)
 \end{aligned}$$

§ 8. Интеграл Фурье.

Рассмотрим частичную сумму ряда (1)

$$\sum_{n=-N}^N \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{\pi n}{l} (\xi - x) d\xi \quad (2)$$

и будем при этом считать, что l меняется (растет) согласованно с ростом N по правилу

$$l^2 = N\pi.$$

Тогда выполним следующие замены $\frac{1}{2l} = \frac{l}{2\pi N}$, $\frac{\pi}{l} = \frac{l}{N}$, в результате чего получим

$$\sum_{n=-N}^N \frac{l}{2\pi N} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{ln}{N} (\xi - x) d\xi. \quad (3)$$

Коэффициенты $\frac{ln}{N}$ в (3) разбивают $[-l, l]$ на равные части, каждая длины $\frac{l}{N}$:

$$-l < -l + \frac{l}{N} < -l + \frac{2l}{N} < \dots < l - \frac{l}{N} < l,$$

поэтому (3) является *интегральной суммой* для следующего интеграла

$$\int_{-l}^l \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(\xi) \cos u(\xi - x) d\xi du. \quad (4)$$

§ 8. Интеграл Фурье.

При $l \rightarrow +\infty$ этот интеграл

$$\int_{-l}^l \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l f(\xi) \cos u(\xi - x) d\xi du \quad (4)$$

переходит в несобственный интеграл и, так как при этом $N \rightarrow \infty$, *получится равенство*:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos u(\xi - x) d\xi \quad (5)$$

или, в другом виде,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [a(u) \cos ux + b(u) \sin ux] du, \quad (6)$$

где

$$a(u) = \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \cos \xi u d\xi, \quad b(u) = \int_{-\infty}^\infty f(\xi) \sin \xi u d\xi.$$

Формула (6) называется **интегральной формулой Фурье**.

8.2. Преобразование Фурье и его свойства

Будем рассматривать функции $f(x)$, заданные на $\mathbb{R}$, интегрируемые по Риману на $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$ и для которых сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Обозначение: $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$.

Опр. Функция

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx \quad (7)$$

называется **преобразованием Фурье (образом Фурье)** функции $f(x)$.

Замечание. Будем использовать экспоненциальную форму записи, объединяющую обозначения формулы (6)

$$a(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos xy dx, \quad b(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin xy dx,$$

которые принято называть **косинус- и синус-преобразованиями Фурье**.

Теорема 19.

Пусть функция $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда

- ▶ ее образ Фурье $\hat{f}(y)$ определен для $\forall y \in \mathbb{R}$,
- ▶ функция $\hat{f}(y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$,
- ▶ выполнено равенство

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \hat{f}(y) = 0.$$

Доказательство.

1) Так как $|f(x)e^{ixy}| = |f(x)|$, то $\widehat{f}(y)$ определена для $\forall y \in \mathbb{R}$ и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy} dx$$

равномерно сходится на $\mathbb{R}$ (признак Вейерштрасса).

2) Рассмотрим

$$I_n(y) = \int_{-n}^n f(x)e^{ixy} dx. \quad (8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |I_n(y_0+h) - I_n(y_0)| &\leq \int_{-n}^n |f(x)| \cdot |e^{ix(y_0+h)} - e^{ixy_0}| dx = \int_{-n}^n |f(x)| \cdot |e^{ixh} - 1| dx \leq * \\ &\leq \int_{-n}^n |f(x)| \cdot |xh| dx \leq nh \int_{-n}^n |f(x)| dx \leq nh \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

$$[* |e^{it} - 1| = 2|\sin(t/2)| \leq |t|]$$

Таким образом, $I_n(y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ для каждого n . Так как $I_n(y) \Rightarrow \widehat{f}(y)$, то $\widehat{f}(y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

3) Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$ и выберем $A > 0$:

$$\int_{|x| \geq A} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3} \quad (9)$$

$$\Rightarrow |\widehat{f}(y)| \leq \left| \int_{-A}^A f(x) e^{ixy} dx \right| + \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Далее рассмотрим разбиение $[-A, A]$: $-A = x_0 < x_1 < \dots < x_n = A$, для которого верхняя сумма Дарбу S удовлетворяет неравенству:

$$0 \leq S - \int_{-A}^A f(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Если рассмотреть кусочно-постоянную функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} M_1 & \text{при } x \in [x_0, x_1], \\ M_k & \text{при } x \in (x_{k-1}, x_k], \quad k = 2, \dots, n, \end{cases}$$

где $M_k = \sup_{x \in (x_{k-1}, x_k)} f(x)$, то

$$S = \int_{-A}^A f_1(x) dx$$

$$\int_{-A}^A |f_1(x) - f(x)| dx = \int_{-A}^A (f_1(x) - f(x)) dx = S - \int_{-A}^A f(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{-A}^A f(x) e^{ixy} dx \right| &\leq \left| \int_{-A}^A f_1(x) e^{ixy} dx \right| + \int_{-A}^A |f_1(x) - f(x)| dx < \\
 &< \left| \sum_{k=1}^n M_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{ixy} dx \right| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \sum_{k=1}^n |M_k| \cdot \left| \frac{e^{ix_k y} - e^{ix_{k-1} y}}{iy} \right| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \\
 &\leq \frac{2}{|y|} \sum_{k=1}^n |M_k| + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3},
 \end{aligned}$$

если

$$|y| \geq \frac{6}{\varepsilon} \sum_{k=1}^n |M_k|. \quad (10)$$

Итак, окончательно, для $\forall y$, удовлетворяющих (10), выполнено

$$|\hat{f}(y)| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Следствие из теоремы 19.

Утверждения теоремы 19 справедливы для косинус- и синус-преобразований Фурье:

$$a(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos xy \, dx, \quad b(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin xy \, dx.$$

8.3. Разложение функции в интеграл Фурье

Итак, отображение (линейное!)

$$f(x) \mapsto \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx$$

корректно определено на $L_1(\mathbb{R})$.

Вопрос: обладает ли оно обратным, т.е. можно ли по $\hat{f}(y)$ восстановить $f(x)$?

Укажем класс функций, на которых преобразование Фурье обратимо (т.е. существует **обратное преобразование Фурье**), и построим формулу для обратного отображения (ее называют **разложением функции $f(x)$ в интеграл Фурье**).

Опр. **Разложением функции $f(x)$ в интеграл Фурье** называют следующий несобственный интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{-ixy} dy \equiv \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(y) e^{-ixy} dy. \quad (11)$$

Теорема 20.

Пусть $f(x) \in L_1(\mathbb{R})$ и в некоторой точке $x \in \mathbb{R}$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера слева и справа с показателем $\alpha \in (0, 1]$. Тогда $f(x)$ разложима в этой точке в интеграл Фурье и справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{-ixy} dy = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)). \quad (12)$$

Доказательство.

1) Так как $\widehat{f}(y)$ непрерывна, то $\forall \lambda > 0$ существует

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y) dy = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iuy} du dy.$$

Покажем, что здесь можно поменять порядок интегрирования.

В силу равномерной сходимости интеграла для $\widehat{f}(y)$
для $\forall \varepsilon > 0 \exists A_0 > 0 : \forall A \geq A_0$ и $\forall y \in [-\lambda, \lambda]$:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iuy} du - \int_{-A}^A f(u) e^{iuy} du \right| < \frac{\pi}{\lambda} \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y) dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \int_{-A}^A f(u) e^{iuy} du dy \right| < \frac{2\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \varepsilon = \varepsilon.$$

Меняем порядок интегрирования во втором интеграле левой части.

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y) dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A f(u) \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iy(u-x)} dy du \right| < \varepsilon \quad \forall A \geq A_0.$$

Последнее соотношение означает сходимость интеграла

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iy(u-x)} dy du$$

и равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iy(u-x)} dy du. \quad (13)$$

2) Вычислим внутренний интеграл в правой части (13):

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iy(u-x)} dy = \frac{e^{i\lambda(u-x)} - e^{-i\lambda(u-x)}}{i(u-x)} = 2 \frac{\sin \lambda(u-x)}{u-x}.$$

Таким образом, из (13) следует равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \widehat{f}(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin \lambda(u-x)}{u-x} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt. \quad (14)$$

3) Покажем, что предел правой части (14) при $\lambda \rightarrow +\infty$ равен $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.

Преобразуем разность

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt - \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)),$$

учитывая значение интеграла Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt - \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)) = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt - \frac{f(x+0)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt - \frac{f(x-0)}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [f(x+t) - f(x+0)] \frac{\sin \lambda t}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 [f(x+t) - f(x-0)] \frac{\sin \lambda t}{t} dt.
\end{aligned}
\tag{15}$$

Проанализируем первое слагаемое в правой части (15).

С пока произвольным $\delta > 0$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [f(x+t) - f(x+0)] \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+t) - f(x+0)] \frac{\sin \lambda t}{t} dt + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x+t)}{\pi t} \sin \lambda t dt - \frac{f(x+0)}{\pi} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt \equiv \\ & \equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Интеграл I_2 стремится к нулю при $\lambda \rightarrow +\infty$, так как он является синус-преобразованием Фурье функции

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)}{\pi t} & \text{при } t \geq \delta, \\ 0 & \text{при } 0 \leq t < \delta, \end{cases}$$

которая принадлежит $L_1(\mathbb{R})$.

Интеграл I_3 стремится к нулю при $\lambda \rightarrow +\infty$, так как

$$\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \int_{\lambda \delta}^{+\infty} \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Наконец, интеграл I_1 допускает оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(x+t) - f(x+0)] \frac{\sin \lambda t}{t} dt \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} |f(x+t) - f(x+0)| \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} M t^{\alpha} \frac{1}{t} dt = \frac{M}{\alpha \pi} \delta^{\alpha}. \end{aligned}$$

Значит, если выбрать $\delta > 0$ так, чтобы

$$\frac{M}{\alpha\pi}\delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{3},$$

а затем указать λ_0 так, чтобы при $\lambda \geq \lambda_0$:

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_3| < \frac{\varepsilon}{3},$$

то модуль первого слагаемого в (15) будет меньше ε .

Аналогично оценивается второе слагаемое в (15). ■

§ 8. Интеграл Фурье.

Замечание. Проанализируем разложение в интеграл Фурье в случае, когда функция $f(x)$ – четная на $\mathbb{R}$.

Во-первых,

$$\begin{aligned}\hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos xy dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin xy dx = \\ &= 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos xy dx\end{aligned}$$

и, следовательно, $\hat{f}(y)$ – четная функция.

Во-вторых,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) &= \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{-ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \cos xy dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 2 \int_0^{\lambda} \hat{f}(y) \cos xy dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \hat{f}(y) \cos xy dy.\end{aligned}$$

Аналогично, для случая **нечетной функции** $f(x)$ на $\mathbb{R}$ имеем

$$\widehat{f}(y) = 2i \int_0^{\infty} f(x) \sin xy \, dx \quad - \text{ нечетная функция,}$$

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)(-i) \sin xy \, dy = \frac{-i}{\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(y) \sin xy \, dy.$$

Замечание. Для произвольной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 20, ее разложение (12) в интеграл Фурье можно записать и с помощью косинус- и синус-преобразований Фурье

$$a(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos xy \, dx, \quad b(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin xy \, dx$$

в следующем виде (**интегральная формула Фурье**):

$$\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (a(y) \cos xy + b(y) \sin xy) \, dy.$$

8.4. Примеры

I. Построение преобразования Фурье

Рассмотрим на $0 \leq x < \infty$ функцию $f(x) = e^{-ax}$, где $a > 0$ – заданный параметр.

Построим ее образ Фурье $\hat{f}(y)$, продолжая $f(x)$ четным образом на $-\infty < x \leq 0$, т.е. полагая для $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = e^{-a|x|}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{iyx} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos yx dx = \\ &= 2e^{-ax} \frac{y \sin yx - a \cos yx}{a^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{2a}{a^2 + y^2}. \quad (16) \end{aligned}$$

Отметим, что в силу формулы для обратного преобразования Фурье справедливо равенство

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{-iyx} dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \widehat{f}(y) \cos xy dy$$

$$\Rightarrow e^{-|a|x} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2a \cos xy}{a^2 + y^2} dx. \quad (17)$$

II. Приложения преобразования Фурье к дифференциальным уравнениям

Покажем на примере, как преобразование Фурье можно использовать для нахождения частных решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим на полупрямой $0 < x < +\infty$ уравнение

$$u'' - u = e^{-ax}, \quad a > 0.$$

Построим частное решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) = 0. \quad (18)$$

Для этого продолжим правую часть уравнения четным образом на полупрямую $-\infty < x \leq 0$: $f(x) = e^{-|a|x}$ и будем искать решение уравнения

$$u'' - u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

в классе четных функций, удовлетворяющих условию (18).

§ 8. Интеграл Фурье.

Перейдем в (19) к образам Фурье, учитывая линейность этого преобразования

$$\widehat{u''} - \widehat{u} = \widehat{f}(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что если

$$u(x) \mapsto \widehat{u}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{iyx} dx,$$

то в классе функций, удовлетворяющих (18), справедливы соответствия

$$\begin{aligned} u'(x) \mapsto \widehat{u'}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} u'(x)e^{iyx} dx = u(x)e^{iyx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - iy \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{iyx} dx = \\ &= -iy \int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{iyx} dx, \end{aligned}$$

$$u''(x) \mapsto \widehat{u''}(y) = (-iy)^2 \widehat{u}(y) = -y^2 \widehat{u}(y).$$

Поэтому, с учетом формулы (16), получим для образа Фурье $\hat{u}(y)$ алгебраическое уравнение:

$$-y^2\hat{u}(y) - \hat{u}(y) = \frac{2a}{a^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(y) = \frac{-2a}{(a^2 + y^2)(1 + y^2)}.$$

Формула разложения в интеграл Фурье позволяет теперь восстановить искомую функцию:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{-2a}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy \, dy}{(a^2 + y^2)(1 + y^2)} = \frac{-2a}{\pi(a^2 - 1)} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy \, dy}{1 + y^2} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy \, dy}{a^2 + y^2} \right] = \\ &= \frac{-a}{a^2 - 1} \left[e^{-|x|} - \frac{1}{a} e^{-a|x|} \right]. \end{aligned}$$

[на последнем шаге использована формула (17)]

Таким образом, искомое решение на полупрямой $0 \leq x < +\infty$ имеет вид

$$u(x) = \frac{-a}{a^2 - 1} \left(e^{-x} - \frac{1}{a} e^{-ax} \right). \quad \blacksquare$$

Это была последняя лекция этого краткого курса по теме
«Ряды и интегралы Фурье».

Спасибо за внимание!